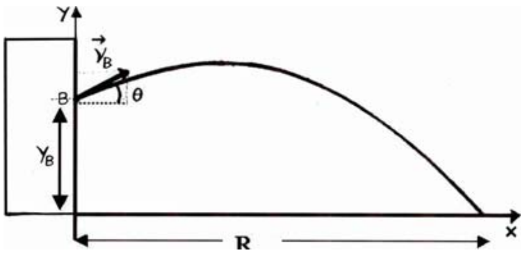
In cucina

Non sono un bravo cuoco, mi manca la vocazione, però a casa è a me che tocca cucinare intorno alle quattro volte a settimana. Naturalmente la mia cucina è basica: piatti semplici e soprattutto rapidi. Curo però molto la qualità delle materie prime. Acquisto il più possibile prodotti biologici e sono attento alla provenienza dei cibi. L'olio d'oliva extravergine lo prendo da un amico che ha un uliveto. Raccoglie le olive al momento giusto e in frantoio è presente alla loro spremitura, rigorosamente meccanica. Quest'olio non ha praticamente acidità e sprigiona un meraviglioso aroma che si apprezza dappertutto. Ovviamente lo uso sui pomodori, sull’insalata, nel sugo, sulla bruschetta e anche sul normale pane, per l'aglio e olio, per le uova al tegamino, ma anche per i fritti e così via. Un giorno mi accingevo a mettere su la pentola piena d'acqua per gli spaghetti allorché uno dei manici si è staccato. Ho posato la pentola sul ripiano del lavandino e mentre pensavo al da farsi ho notato lo zampillo d'acqua che usciva da un foro che si era prodotto per lo scollamento del manico. Lo zampillo faceva un arco cadendo ad una certa distanza dalla base della pentola

Mi sono chiesto: come si può calcolare la distanza a cui cade l'acqua?
Ho pensato che potevo modellare il fenomeno come il lancio orizzontale di un grave da una certa altezza rispetto alla base.



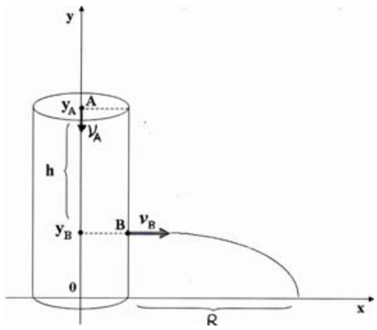
Qui ci interessa solo la formula della gittata R per un lancio da postazione elevata y_B.
La formula si può dedurre facilmente (trascurando la resistenza dell’aria) dai princìpi del moto (però si trova anche bell’e pronta su alcuni testi e sul web). Si ha $x = v_B \cos\theta t$, $y = v_B \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 + y_B$. È $t = \frac{x}{v_B \cos\theta}$ che sostituita in $y = 0$ fornisce $\frac{g}{2v_B^2 \cos^2(\theta)} x^2 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} x - y_B = 0$ dalla quale, risolvendo rispetto ad x, si ottiene la gittata

$$R = \frac{v_B \cos\theta}{g}\left(v_B \sin\theta + \sqrt{v_B^2 \sin^2\theta + 2gy_B}\right)$$

Poiché nel nostro caso lo zampillo esce orizzontalmente si deve porre $\theta = 0$ e quindi

$$R = v_B \sqrt{\frac{2y_B}{g}}$$

Supponendo di avere tutte le misure geometriche mi rimaneva da calcolare la velocità v_B d'uscita dello zampillo per determinarne la gittata.
A questo punto dovevo ricorrere a qualche formula di fluidodinamica e la formula principe, in queste circostanze, è senz'altro quella di Bernoulli applicata a una situazione del tipo della figura sottostante



$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B \qquad (1)$$

p_A e p_B sono la pressione atmosferica nei relativi punti, ρ la densità dell'acqua, g l'accelerazione di gravità, mentre gli altri parametri sono illustrati in figura.
Nel mentre che scrivevo queste formule la gittata dello zampillo si andava accorciando in quanto l'altezza dell'acqua nella pentola diminuiva. Mi serviva perciò di valutare anche la velocità di abbassamento $v_A(t)$ del livello $h(t)$ dell'acqua oltre alla $v_B(t)$.
Nella (1) è senz'altro $p_A = p_B$ e ponendo $h(t) = y_A(t) - y_B$ si ottiene

$$v_B^2(t) = v_A^2(t) + 2g\,h(t) \qquad (2)$$

Si ha inoltre che il volume di acqua che esce dal foro nell'unità di tempo (portata) è uguale al volume che viene a mancare nella pentola $v_A(t)S_A = v_B(t)S_B$, in cui S_A è l'area trasversale della pentola, che è cilindrica, e S_B è l'area del foro in B.
La sequenza delle operazioni è la seguente: si esplicita per prima la relazione per $h(t)$, quindi $v_A(t) = -\frac{dh(t)}{dt}$, poi $v_B(t) = \frac{v_A(t)S_A}{S_B}$ e infine $R = v_B\sqrt{\frac{2y_B}{g}}$.

Sostituendo in (2) la $v_B(t) = \frac{v_A(t)S_A}{S_B}$, riordinando i termini con l'intento di isolare $v_A(t)$ e ponendo $\left(\frac{S_A}{S_B}\right)^2 - 1 = K$, si ha $v_A(t) = \sqrt{\frac{2g}{K}}\sqrt{h(t)}$ dalla quale, sostituendovi $v_A(t) = -\frac{dh(t)}{dt}$ e separando le variabili, si ottiene $-\frac{dh(t)}{\sqrt{h(t)}}=\sqrt{\frac{2g}{K}}dt$. Integrando abbiamo $-2\sqrt{h(t)}=\sqrt{\frac{2g}{K}}t+\text{cost}$ e poiché $t=0 \Rightarrow h(0)\equiv h$ (livello iniziale dell'acqua) la costante d'integrazione è $\text{cost}=-2\sqrt{h}$ per cui

$$\sqrt{h(t)}=\sqrt{h}-\sqrt{\frac{g}{2K}}t \qquad (3)$$

Eliminando le radici e isolando $h(t)$ si ottiene

$$h(t)=\frac{g}{2K}t^2-\sqrt{\frac{2gh}{K}}t+h \qquad (4)$$

ossia l'andamento del livello dell'acqua nella pentola in funzione del tempo.
Dalla (3) si ricava rapidamente il tempo di durata T dello zampillo ponendo $h(T)=0$, e si ha $T=\sqrt{\frac{2Kh}{g}}$, mentre dalla (4) si deduce

$$v_A(t)=-\frac{dh(t)}{dt}=\sqrt{\frac{2gh}{K}}-\frac{g}{K}t \qquad (5)$$

Poiché è $v_B(t)=\frac{v_A(t)S_A}{S_B}$ si avrà, dopo aver eseguito la sostituzione di $v_A(t)$ e qualche semplificazione $v_B(t)=\sqrt{\frac{2gh}{\left[1-\left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2\right]}}-\frac{S_AS_Bg}{\left(S_A^2-S_B^2\right)}t$

Infine si può scrivere la formula della gittata $R(t)$ in funzione del tempo

$$R(t)=v_B(t)\sqrt{\frac{2y_B}{g}}=\left\{\sqrt{\frac{2gh}{\left[1-\left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2\right]}}-\frac{S_AS_Bg}{\left(S_A^2-S_B^2\right)}t\right\}\sqrt{\frac{2y_B}{g}}$$

Definito il modello del fenomeno sono passato alla verifica sperimentale.
Innanzitutto ho voluto verificare quale fosse la durata dello zampillo fino al suo esaurimento.
La durata calcolata in base a $T=\sqrt{\frac{2Kh}{g}}$ è di 14 minuti e 28 secondi. Quando però sono andato a misurarla sono avvenuti dei fenomeni imprevisti. Innanzitutto mi sono accorto che l'acqua fuoriusciva anche da un forellino appena percettibile posto sopra quello d'interesse. Si trattava di un altro attacco del manico. Questo esiguo flusso non zampillava ma aderiva alla parete della pentola scorrendo verso il basso. Ho provveduto a chiuderlo con nastro adesivo. Dopo circa 6 minuti e 18 secondi di flusso si è verificato un particolare fenomeno: lo zampillo, ormai molto vicino alla parete della pentola, è collassato improvvisamente attaccandosi ad essa pur continuando l'acqua ad uscire

ancora. Curiosamente l'adesione dello zampillo alla parete della pentola è iniziata dall'estremità bassa e si è propagata all'insù fino al foro. Questo fenomeno è noto come "effetto teiera" e ricordo di averne letto una descrizione ne Le Scienze di tanti anni fa. Documentatevi sul web perché è interessante. Questo residuo flusso aderente alla parete della pentola è durato ben 28 minuti dopodiché l'acqua ha smesso di fluire. Ho ispezionato l'interno della pentola e ho notato che il livello dell'acqua era ancora almeno 1 millimetro sopra il foro. Il fatto che non uscisse più è probabilmente dovuto alla tensione superficiale all'interfaccia aria-acqua: il foro è troppo piccolo e il livello dell'acqua sopra di esso troppo poco alto per produrre una velocità di efflusso adeguata per tutta l'evoluzione temporale. Il foro nella pentola sarebbe dovuto stare molto più in basso per accordarsi meglio con il modello semplificato utilizzato. Comunque ho misurato l'area S_B del forellino d'uscita tramite la misura del suo diametro presa con un calibro, assumendone la circolarità. Indi ho proceduto a prendere le altre misure geometriche S_A e h (valore iniziale del livello dell'acqua rispetto al foro). Dopo ho chiuso il foro premendovi sopra un dito e ho riempito di nuovo la pentola. Quindi ho scoperto il foro facendo sgorgare lo zampillo. Ho misurato rapidamente la gittata iniziale dello zampillo tramite un metro flessibile e contemporaneamente ho fatto partire il cronometro online sul pc. Ho poi misurato la gittata che andava accorciandosi ad un altro tempo. Infine ho confrontato le misure con le previsioni della formula della gittata R su ricavata. Diametro interno della pentola $20\,cm$, $S_A = 314{,}16\,cm^2$, diametro foro $0{,}2\,cm$ per cui $S_B = 0{,}031416\,cm^2$, $g = 981\,cm/s^2$, $h = y_A - y_B = 18{,}5 - 14{,}8 = 3{,}7\,cm$

TEMPI	R formula	R misurata
0 secondi	14,800 cm	10,5 cm
2' 35"	14, 797 cm	7 cm

Come si vede l'accordo è pessimo, soprattutto per l'evoluzione temporale.
Oltre agli effetti sopra citati bisogna anche considerare la rudimentalità dei metodi utilizzati per le verifiche e l'approssimazione, forse eccessiva, delle misure geometriche. C'è anche da dire che in questa misura il flusso esibiva delle fluttuazioni spaziali che rendevano poco precisa la misura della gittata. Questa instabilità non era dovuta al movimento dell'atmosfera circostante ma probabilmente all'interazione del flusso con le irregolarità del foro d'uscita. Penso che il modello matematico in sé sia abbastanza buono però quest'esperienza dimostra che questo tipo di misure necessitano di accorgimenti molto più raffinati per produrre dei risultati validi.
È stata una grande lezione che ci mette in guardia dall'assumere un modello matematico come coincidente tout court con la realtà. Ci sprona anche a coltivare di più l'aspetto delle verifiche sperimentali nell'istruzione a tutti i livelli. Aspetto molto carente nel nostro curriculum scolastico.
A questo punto erano passate almeno tre ore da quando avevo iniziato a cucinare e, improvvisamente, si sono levate delle voci di protesta "Ma quando si mangia oggi?".
"Ragazzi, vi consiglio di non protestare" ho esclamato "altrimenti accomodatevi voi ai fornelli". Ne è seguito un rassegnato silenzio. A mio buon cuore ho preparato un veloce aglio e olio e un paio di uova al tegamino a testa che sono stati molto apprezzati, come al solito, e vorrei pure vedere!